

rotações infinitesimais e vel. angular

Para falarmos da dinâmica rotacional de um corpo rígido, precisamos discutir a taxa de variação de sua orientação espacial. E para isso, é necessário (e conveniente) discutirmos rotações infinitesimais

Usando o ponto de vista ativo: se o vetor $\vec{g}$ é transformado num novo vetor $\vec{g}'$ por uma rotação de um ângulo infinitesimal $d\phi$ ao redor do eixo $\hat{n}$, então já vimos que

$$\vec{g}' = \vec{g} + \underbrace{(d\phi \hat{n})}_{\equiv \vec{d}\vec{\Omega}} \times \vec{g}$$

$\equiv \vec{d}\vec{\Omega}$ (apenas notação, não significa a existência de um $\vec{\Omega}$)

Em geral, duas rotações finitas A, B não comutam, ie. $\vec{g} \xrightarrow{A} \vec{g}' \xrightarrow{B} \vec{g}'' \neq \vec{g} \xrightarrow{B} \vec{g}' \xrightarrow{A} \vec{g}''$!

Porém, para rotações infinitesimais isso deixa de ser verdade, considerando apenas termos em 1ª ordem nos infinitésimos

$$\vec{g} \rightarrow \vec{g}' = \vec{g} + \vec{d}\vec{\Omega}_1 \times \vec{g} \rightarrow \vec{g}'' = \vec{g}' + \vec{d}\vec{\Omega}_2 \times \vec{g}' = \vec{g} + (\vec{d}\vec{\Omega}_1 + \vec{d}\vec{\Omega}_2) \times \vec{g} + O(\delta\phi^2)$$
$$\text{e } \vec{g}'' = \vec{g} + (\vec{d}\vec{\Omega}_2 + \vec{d}\vec{\Omega}_1) \times \vec{g} + O(\delta\phi^2)$$

Em termos de matrizes de rotação: $\vec{g}'_z = A_1 \vec{g}_z$, onde $A_1 = I + \epsilon_1$

matriz com elementos
infinitesimais

$$\text{e } A_2 A_1 = (I + \epsilon_2)(I + \epsilon_1) = I + \epsilon_2 + \epsilon_1 = A_1 A_2 \quad (+ o(\epsilon_1, \epsilon_2))$$

Como as rotações formam um grupo: $I = (I + \epsilon)(I + \epsilon)^T = I + \epsilon + \epsilon^T + o(\epsilon^2)$

$$\rightarrow \boxed{\epsilon = -\epsilon^T} \quad (\epsilon \text{ é uma matriz antissimétrica})$$

Assim, a cada rotação infinitesimal $d\vec{\Omega} = (d\Omega_x, d\Omega_y, d\Omega_z)$ corresponde a matriz

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -d\Omega_z & d\Omega_y \\ d\Omega_z & 0 & -d\Omega_x \\ -d\Omega_y & d\Omega_x & 0 \end{pmatrix} = d\Omega_x J_x + d\Omega_y J_y + d\Omega_z J_z = d\phi (\vec{n} \cdot \vec{J})$$

$\vec{J} = \text{"vetor de matrizes"}$

$$\text{onde } J_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad J_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{"geradores infinitesimais" das rotações em } \mathbb{R}^3$$

$$\text{É fácil verificar que } J_x J_y - J_y J_x \equiv \overbrace{[J_x, J_y]}^{\text{comutador}} = J_z, \text{ e igualmente}$$
$$[J_y, J_z] = J_x; \quad [J_z, J_x] = J_y$$

Repare agora que, por definição, uma rotação finita pode ser escrita como a composição de um número infinito de rotações infinitesimais idênticas, ie

$$A(\alpha, \hat{n}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[A\left(\frac{\alpha}{N}, \hat{n}\right) \right]^N = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(I + \frac{\alpha}{N} \hat{n} \cdot \vec{J} \right)^N$$

Recorde que, para qualquer número x , vale a relação $\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{N} \right)^N = e^x$

Essa relação pode ser estendida também para matrizes X , da seguinte forma:

definimos $\exp(X) \equiv \sum_m \frac{X^m}{m!}$. Ainda, se X for diagonalizável, então

$$X = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ na base diagonal} \rightarrow \exp(X) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} = \lim_{N \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \left(1 + \frac{\lambda_1}{N}\right)^N & & \\ & \ddots & \\ & & \left(1 + \frac{\lambda_n}{N}\right)^N \end{bmatrix}$$
$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(I + \frac{X}{N} \right)^N$$

Assim: $A(\alpha, \hat{n}) = \exp[\alpha \hat{n} \cdot \vec{J}]$

Velocidade angular

Se um corpo realiza uma rotação infinitesimal $\vec{d}\Omega$ no intervalo (t infinitesimal) dt , definiremos sua vel. angular como $\vec{\omega} \equiv \frac{d\Omega}{dt}$. Aqui essa razão deve ser entendida como um limite $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\vec{d}\Omega)(\Delta t)}{\Delta t}$ e não como a derivada no tempo de uma função $\vec{\Omega}(t)$.

Como as rotações podem ser escritas em função dos ângulos de Euler ϕ, θ, ψ , a sua taxa de variação deve ser uma função das derivadas $\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$.

Para descobrir essa função, consideramos que uma rotação infinitesimal arbitrária pode ser escrita como o produto de 3 rotações infinitesimais na sequência de Euler. Chamando as respectivas vel. angulares de $\vec{\omega}_\phi, \vec{\omega}_\theta, \vec{\omega}_\psi$, com magnitudes $\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$, então devido à regra de composição ^{aditiva} p/ rots infinitesimais a vel. angular total é:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_\phi + \vec{\omega}_\theta + \vec{\omega}_\psi$$

$$\text{onde: } \vec{\omega}_\phi = \dot{\phi} \hat{z} \quad \vec{\omega}_\theta = \dot{\theta} \hat{x}' \quad \vec{\omega}_\psi = \dot{\psi} \hat{z}'$$

É útil representar os três vetores no mesmo sistema de eixos, por exemplo o sistema Σ^1 "amarrado" ao corpo girante. Nesse caso:

$$(\vec{\omega}_\phi)_{\Sigma^1} = A_{\text{Euler}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \dot{\phi} \begin{pmatrix} \sin\theta \sin\psi \\ \sin\theta \cos\psi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

Ainda, observando que passamos do sistema (ξ', η', ζ') para (x', y', z') através da matriz B , então $(\vec{\omega}_\theta)_{\xi'} = B \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \dot{\theta} \begin{pmatrix} \cos \psi \\ -\sin \psi \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\text{Assim: } \vec{\omega}_{\Sigma'} = \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \psi \dot{\phi} + \cos \psi \dot{\theta} \\ \sin \theta \cos \psi \dot{\phi} - \sin \psi \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{pmatrix}$$

da mesma forma

$$(\vec{\omega}_\psi)_\Sigma = A_e^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \dot{\psi} \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad (\vec{\omega}_\theta)_\Sigma = D^T \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \dot{\theta} \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{assim } \vec{\omega}_\Sigma = \begin{pmatrix} \cos \phi \dot{\theta} + \sin \theta \sin \phi \dot{\psi} \\ \sin \phi \dot{\theta} - \sin \theta \cos \phi \dot{\psi} \\ \cos \theta \dot{\psi} + \dot{\phi} \end{pmatrix}$$

Podemos usar essa expressão p/ checar (ex. 3.6) que $\nexists \vec{\Omega}(\phi, \theta, \psi)$ tal que $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\Omega}}{dt}$. Se existisse, então $\frac{d\vec{\Omega}}{dt} = \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial \phi} \dot{\phi} + \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial \psi} \dot{\psi} + \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t}$

Comparando c/ as eqs acima, porém, precisaríamos então

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mas tb } \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{contradição!}$$

Transformação de derivadas temporais p/ referencial $\bar{n}$ inercial

Taxas de variação temporal como velocidades, acelerações etc. devem ser diferentes em um ref Σ' em rotação (p. exemplo, uma partícula com vel. = 0 nesse referencial tem velocidade $\neq 0$ no ref. inercial Σ). Mais especificamente: se num intervalo dt o referencial Σ' rotaciona de $d\Omega$ com respeito a Σ , vimos que um vetor $\vec{g}$ parado com respeito a Σ' varia de $d\Omega \times \vec{g}$ no ref. Σ . No caso então de um vetor variando $d\vec{g}_{\bar{n}-in}$ também no ref. Σ' , podemos esperar que a variação total no ref inercial será a soma das duas:

$$d\vec{g}_{in} = d\vec{g}_{\bar{n}-in} + d\Omega \times \vec{g}$$

e assim: $\left(\frac{d\vec{g}}{dt}\right)_{in} = \left(\frac{d\vec{g}}{dt}\right)_{\bar{n}-in} + \vec{\omega} \times \vec{g}$, onde $\vec{\omega} = \frac{d\Omega}{dt} = \frac{d\phi}{dt} \hat{n}$

Para ver isso com mais rigor: $\vec{g} = \sum_i g_i \hat{e}_i = \sum_i g'_i \hat{e}'_i$

Assim: $\left(\frac{d\vec{g}}{dt}\right)_{in} = \sum_i \frac{dg_i}{dt} \hat{e}_i + g_i \left(\frac{d\hat{e}_i}{dt}\right)_{in}$

e tb $\left(\frac{d\vec{g}}{dt}\right)_{in} = \underbrace{\sum_i \frac{dg'_i}{dt} \hat{e}'_i}_{\left(\frac{d\vec{g}}{dt}\right)_{\bar{n}-in}} + g'_i \left(\frac{d\hat{e}'_i}{dt}\right)_{in} = \left(\frac{d\vec{g}}{dt}\right)_{\bar{n}-in} + \sum_i g'_i \vec{\omega} \times \hat{e}'_i$

$$\therefore \boxed{\left(\frac{d\vec{g}}{dt}\right)_{in} = \left(\frac{d\vec{g}}{dt}\right)_{\bar{n}-in} + \vec{\omega} \times \vec{g}}$$

Como essa relação vale p/ qualquer vetor $\vec{g}$, pode ser expressa apenas em termos de operadores

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_{\Sigma} = \left(\frac{d}{dt}\right)_{\Sigma'} + \vec{\omega} \times \cdot$$

em particular: $\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_{\Sigma} = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_{\Sigma'}$

obs: se s é um escalar, então podemos escrever $s = \vec{g} \cdot \vec{h}$. Assim

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)_{\Sigma} = \left(\frac{d\vec{g}}{dt}\right)_{\Sigma} \cdot \vec{h} + \vec{g} \cdot \left(\frac{d\vec{h}}{dt}\right)_{\Sigma} = \left(\frac{d\vec{g}}{dt}\right)_{\Sigma'} \cdot \vec{h} + \vec{g} \cdot \left(\frac{d\vec{h}}{dt}\right)_{\Sigma'} + \cancel{(\vec{\omega} \times \vec{g}) \cdot \vec{h}} + \vec{g} \cdot \cancel{(\vec{\omega} \times \vec{h})} = \left(\frac{ds}{dt}\right)_{\Sigma'}$$

e' igual em ambos os refs.

2ª derivada:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{d}{dt}\right)_{\Sigma} \right] &= \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{d}{dt}\right)_{\Sigma'} + \vec{\omega} \times \cdot \right]_{\Sigma'} + \vec{\omega} \times \left[\left(\frac{d}{dt}\right)_{\Sigma'} + \vec{\omega} \times \cdot \right] \\ &= \left(\frac{d^2}{dt^2}\right)_{\Sigma'} + \left(\frac{d}{dt} [\vec{\omega} \times \cdot]\right)_{\Sigma'} + \vec{\omega} \times \left(\frac{d}{dt}\right)_{\Sigma'} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \cdot \end{aligned}$$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}\right)_{\Sigma} = \left(\frac{d^2}{dt^2}\right)_{\Sigma'} + \underbrace{\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right) \times \cdot}_{\substack{\text{igual} \\ \text{p/ } \Sigma, \Sigma'}} + 2\vec{\omega} \times \left(\frac{d}{dt}\right)_{\Sigma'} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \cdot$$